На правах рукописи

ИСМАГИЛОВ ИРЕК НАИЛЕВИЧ

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УСТАНОВИВШЕЙСЯ АНИЗОТРОПНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С МНОГОЗНАЧНЫМ ЗАКОНОМ

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

КАЗАНЬ – 2008

Работа выполнена в Казанском государственном университете

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Бадриев Ильдар Бурханович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Лапин Александр Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор Якимов Николай Дмитриевич
Ведущая организация:	Институт прикладной механики Уральского отделения РАН (г. Ижевск)

Защита состоится "4" декабря 2008 г. в 14 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.081.21 в Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская 35, корп. 2, ауд. 217.

С диссертацией можно ознакомится в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан "25" октября 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физ.- мат. наук О.А. Задворнов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Математическое моделирование широко используется при решении различных классов прикладных задач. В особенности это относится к нелинейным задачам. Одной из областей, в которой эффективно используются методы математического моделирования, является теория подземной фильтрации аномальных жидкостей. Решению возникающих в этой области задач посвящена обширная литература. Однако, во-первых, в основном используются линейные модели, а во-вторых, рассматривается случай изотропной среды. В то же время, многие практические задачи требуют использования нелинейных законов фильтрации (с предельным градиентом, многозначные законы). Кроме того, изучение движения жидкостей в пористых средах свидетельствует об их анизотропности. Поэтому исследование математических моделей, учитывающих нелинейный и анизотропный характер зависимости скорости фильтрации от градиента давления, построение эффективных методов численной реализации таких моделей является актуальной задачей.

Цель исследований. Цель работы - построение и исследование математических моделей задач анизотропной фильтрации несжимаемой жидкости, построение и исследование приближенных методов решения указанных задач.

Методы исследований. При изучении рассматриваемых в работе задач используются методы выпуклого анализа, нелинейного функционального анализа, теория монотонных операторов, метод конечных элементов.

Научная новизна. Основные результаты работы являются новыми и состоят в исследовании корректности математических моделей задач фильтрации несжимаемой жидкости, следующей нелинейному многозначному анизотропному закону фильтрации, построении и исследовании приближенных методов для решения вариационных неравенств второго рода в банаховых и гильбертовых пространствах, которые возникают при математическом описании рассматриваемых задач фильтрации, численной реализации предложенных алгоритмов.

Практическая ценность. Разработанные математические модели и численные методы могут быть использованы при решении конкретных стационарных задач фильтрации — задач фильтрации несжимаемых жидкостей, следующих нелинейному многозначному анизотропному закону фильтрации.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на итоговой научно-образовательной конференции студентов Казанского государственного университета 2005 г., XIV, XV Международных конференциях по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (Алушта, Крым, 25-31 мая 2005 г., 25-31 мая 2007 г.), научной конференции "Теория управления и математическое моделирование" (Ижевск, 3 - 8 июля 2006 г.), 6-ом, 7-ом Всероссийских семинарах "Сеточные методы для краевых задач и приложения" (г. Казань, 1 - 4 октября 2005, 21-24 сентября 2007 г.г.), VII Международной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения" (Саранск, 17-24 мая 2006 г.), VII Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2008) (Алушта, Крым, 24-31 мая 2008 г.), итоговых научных конференциях Казанского государственного университета 2005-2007 г.г., научных семинарах кафедры вычислительной математики КГУ.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 8 работ. Из них одна – в издании из списка, рекомендованных ВАК.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, списка литературы и изложена на 120 страницах и содержит 21 рисунок. Список литературы состоит из 149 наименований.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований (грант 06-01-00633).

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность исследований, изложен обзор работ, близких к теме диссертации, дано ее краткое содержание.

Первая глава посвящена исследованию математических моделей установившихся процессов фильтрации несжимаемой жидкости, следующей нелинейному многозначному анизотропному закону фильтрации с предельным градиентом. Обобщенная задача формулируется в виде вариационного неравенства второго рода.

В § 1 дается постановка стационарной задачи фильтрации несжимаемой жидкости, следующей нелинейному многозначному анизотропному закону фильтрации с предельным градиентом.

Рассматривается установившейся процесс фильтрации несжимаемой жидкости. Фильтрация происходит в ограниченной области $\Omega \subset R^m$, $m \geq 1$

с непрерывной по Липшицу границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $(\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset, \ \operatorname{mes} \Gamma_2 > 0)$.

Необходимо найти стационарные поля давления u и скорости v жидкости, удовлетворяющих уравнению неразрывности

$$\operatorname{div} v(x) = \tilde{f}(x), \ x \in \Omega, \tag{1}$$

и граничным условиям

$$(v(x), \mathbf{n}) = 0, \ x \in \Gamma_1, \qquad \mathbf{n} - \text{ внешняя нормаль к } \Gamma_1, \tag{2}$$

$$u(x) = 0, \ x \in \Gamma_2, \tag{3}$$

в предположении, что течение жидкости следует нелинейному многозначному анизотропному закону фильтрации

$$v_l(u) \in -\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \left[\sum_{i=1}^{m} \alpha_{kl}^{(i)} g_i \Big(D_i^2 \big(u(x) \big) \Big) \right] \frac{\partial u(x)}{\partial x_k}, \quad x \in \Omega, \tag{4}$$

$$D_i^2(u) = (\Upsilon_i \nabla u, \nabla u), \quad \Upsilon_i = \left\{ \alpha_{k,l}^{(i)} \right\}_{k,\, l=1,m} \quad \Upsilon_i \geq 0, \ \Upsilon_i = \Upsilon_i^T.$$

$\xi \to g_i(\xi^2)\xi, \ i = 1, \ldots, m -$ функции, определяющие закон фильтрации, относительно которых предполагаем, что:

$$g_i(\xi^2)\xi = g_{i0}(\xi^2)\,\xi + \vartheta_i\, g_{i1}(\xi^2)\,\xi, \tag{5}$$

где $\xi \to g_{i0}(\xi^2)\xi -$ однозначные функции, удовлетворяющие условиям:

$$g_{i0}(\xi^2)\,\xi = 0 \quad \text{при } \ \xi \leq \beta_i, \quad (\beta_i \geq 0 - \text{ предельные градиенты}), \tag{6}$$

$$c_{1\,i}\,(\xi - \beta_i)^{p-1} \leq g_{i0}(\xi^2)\,\xi \leq c_{2\,i}\,\xi^{p-1}, \ \ \xi \geq \beta_i, \ \ c_{1\,i}, c_{2\,i} > 0, \tag{7}$$

$$\xi \to g_{i0}(\xi^2)\,\xi \ \text{ непрерывны}, \tag{8}$$

$$g_{i0}(\xi^2)\,\xi - g_{i0}(\zeta^2)\,\zeta \geq 0 \ \text{ при } \ \xi \geq \zeta, \tag{9}$$

$\xi \to g_{i1}(\xi^2)\xi -$ многозначные функции, имеющие вид:

$$g_{i1}(\xi^2)\,\xi = \vartheta_i\, h(\xi - \beta_i), \quad h(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < \beta_i, \\ [0,1]\,, & \xi = \beta_i, \\ 1, & \xi > \beta_i. \end{cases}$$

Относительно коэффициентов $\alpha_{k\,l}^{(i)}$ предполагаем, что

$$\alpha_{kl}^{(i)} = \alpha_{lk}^{(i)}, \quad \sum_{k,\,l=1}^{m} \alpha_{kl}^{(i)}\,\xi_k\,\xi_l \geq c_{4i} \sum_{k=1}^{m} \xi_k^2, c_{4\,i} > 0, \ \alpha_{k\,l}^{(i)} \leq c_{5i}. \tag{10}$$

Обозначим
$$(\xi,\zeta)_i=\sum_{k,\,l=1}^{m}\alpha_{kl}^{(i)}\,\xi_k\,\zeta_l, \tag{11}$$

В силу условий (10) соотношение (11) порождает скалярное произведение в R^m. Поэтому для любых функций u, η имеют место неравенства

$$(\Upsilon_i\nabla u,\nabla\eta)\le D_i(u)\,D_i(\eta),\qquad D_i^2(u)\le c_{6i}\,|\nabla u|^2,\ c_{6i}>0, i=1,\ldots,m.$$

Пусть $V=\left\{\eta\in W_p^1(\Omega):\eta=0,x\in\Gamma_2\right\}-$ пространство Соболева.

Пусть операторы $A_i:V\to V^*$ порождены формулами

$$\langle A_iu,\eta\rangle=a_i(u,\eta)=\int\limits_\Omega g_{0\,i}\left(D_i^2(u)\right)(\Upsilon_i\nabla u,\nabla\eta)\,dx\ \ u,\eta\in V.$$

$$\langle Au,\eta\rangle=\frac{1}{m}\ \sum_{i=1}^{m}\langle A_iu,\eta\rangle=$$

$$=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\ \int\limits_\Omega g_{i\,0}\left(D_i^2(u)\right)\left(\Upsilon_i\nabla u,\nabla\eta\right)dx\ \ \forall\,u,\eta\in V. \tag{12}$$

Определим функционалы F_i, $i=1,2,\ldots,m$, по формулам

$$F_i(u)=\frac{1}{m}\,\vartheta_i\int\limits_\Omega\mu\left(D_i(u(x))-\beta_i\right)\,dx=\frac{1}{2\,m}\ \int\limits_\Omega\ \int\limits_0^{D_i^2(u)}g_{i\,1}(\xi)\ d\xi\ dx. \tag{13}$$

Под решением стационарной задачи фильтрации несжимаемой жидкости, следующей нелинейному анизотропному многозначному закону фильтрации, будем понимать функцию $u\in V$, являющуюся решением вариационного неравенства

$$\langle Au-f,\eta-u\rangle+\sum_{i=1}^{m}F_i(\eta)-\sum_{i=1}^{m}F_i(u)\ge 0\quad\forall\,\eta\in V, \tag{14}$$

где элемент $f\in V^*$ определяется по формуле $\langle f,\eta\rangle=\int\limits_\Omega\tilde{f}(x)\,\eta(x)\,dx.$

В случае, когда $V-$ гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, отождествленное со своим сопряженным V^*, вариационное неравенство (14) может быть записано в виде:

$$(Au-f,\eta-u)+\sum_{i=1}^{m}G_i\big(B_i\eta\big)-\sum_{i=1}^{m}G_i\big(B_iu\big)\ge 0\quad\forall\,\eta\in V, \tag{15}$$

где $F_i = G_i \circ B_i$, функционалы G_i определены на $H = \big[L_q(\Omega)\big]^m$, $q = \dfrac{p}{p-1}$ по формулам

$$G_i(z) = \frac{1}{2\,m} \int\limits_{\Omega} \int\limits_{0}^{|\,z\,|^2} g_{i\,1}(\xi) d\xi \, dx = \frac{1}{m} \int\limits_{\Omega} \int\limits_{0}^{|\,z\,|} g_{i\,1}(\xi^2)\, \xi \, d\xi \, dx,$$

являются выпуклыми, липшиц-непрерывными, $B_i = \Upsilon_i^{1/2} \nabla : V \to H$— линейные, непрерывные операторы.

На практике при решении задач нелинейной фильтрации с предельным градиентом важным является нахождение границ областей, где течение жидкости не происходит.

В § 2 **главы 1** установлены свойства оператора A, которые необходимы затем для доказательства теоремы существования решения вариационного неравенства (14). Доказано, что оператор A является монотонным, непрерывным и коэрцитивным, причем выполняется неравенство

$$\langle Au, u \rangle \geq \frac{c_1}{m} \sum_{i=1}^{m} \|u\|_V^p - \frac{c_2}{m} \sum_{i=1}^{m} \|u\|_V^{p-1} \quad \forall\, u \in V.$$

А функционалы, определенные в (13), конечны на пространстве V, являются выпуклыми, липшиц-непрерывными.

Доказана

Теорема 1 . *Пусть выполнены условия* (6) − (9)*. Тогда вариационное неравенство* (14) *имеет непустое, выпуклое, замкнутое множество решений. Если u − решение вариационного неравенства* (14)*, то существует функция $v \in H$ такая, что почти всюду на Ω выполнены включения* (4)*, и имеет место уравнение неразрывности*

$$\int\limits_{\Omega} (v(x), \nabla \eta(x))\, dx = \int\limits_{\Omega} \tilde{f}(x)\, \eta(x)\, dx \qquad \forall\, \eta \in C^{\infty}_{\Gamma_2}(\Omega).$$

Вторая и **третья** главы посвящены построению итерационных методов изучаемых в диссертации задач анизотропной фильтрации и исследованию сходимости этих методов. Предварительно методы формулируются для абстрактных вариационных неравенств второго рода, а затем эти методы применяются для решения рассматриваемых задач фильтрации.

В § 1 **главы 2** изложен метод итеративной регуляризации для решения вариационных неравенств 2-го рода.

Пусть V – рефлексивное банахово пространство с равномерно выпуклым сопряженным V^*, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – отношение двойственности между V и V^*, M – выпуклое замкнутое множество в V, $A : V \to V^*$ – псевдомонотонный, коэрцитивный оператор. Предполагаем, также, что A – ограниченно липшиц-непрерывный оператор:

$$\|Au - A\eta\|_{V^*} \le \mu(R)\Phi(\|u-\eta\|_V) \quad \forall\, u,\eta \in V, \tag{16}$$

где $R = \max\{\|u\|_V, \|\eta\|_V\}$, μ – неубывающая на $[0,+\infty)$ функция, Φ – непрерывная, строго возрастающая на $[0,+\infty)$ функция такая, что $\Phi(0) = 0$, $\Phi(\xi) \to +\infty$ при $\xi \to +\infty$, а также удовлетворяет условию:

$$\int\limits_0^1 (\langle A(t(u+\eta)), u+\eta\rangle - \langle A(tu), u\rangle)dt = \int\limits_0^1 \langle A(u+t\eta), \eta\rangle dt \quad \forall\, u,\eta \in V.$$

Пусть, далее, $F_i : V \to R^1$, $i = 1,2,\dots m$ – выпуклые, недифференцируемые, липшиц-непрерывные с константами $\gamma_i > 0$ функционалы.

Рассматривается задача поиска элемента $u \in V$, являющегося решением вариационного неравенства второго рода

$$\langle Au - f, \eta - u\rangle + \sum_{i=1}^m F_i(\eta) - \sum_{i=1}^m F_i(u) \ge 0 \quad \forall\, \eta \in M. \tag{17}$$

Для решения вариационного неравенства (17) предложен метод итеративной регуляризации.

Пусть $\varepsilon > 0$, $F_{i\varepsilon}$ – функционал, удовлетворяющий условиям

$$|F_{i\varepsilon}(\eta) - F_i(\eta)| \le c(\varepsilon), \quad \forall\, \eta \in V, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} c(\varepsilon) = 0, \tag{18}$$

$$|F_{i\varepsilon}(\upsilon) - F_{i\varepsilon}(u)| \le \gamma^*\|\upsilon - u\|_V \quad \forall\, u,\upsilon \in V, \quad \gamma^* > 0. \tag{19}$$

Для решения задачи (17) рассмотрим следующий итерационный метод. Пусть $u^{(0)} \in M$ – произвольный элемент. Определим для $n = 0,1,2,\dots$ элемент $u^{(n+1)} \in M$ как решение вариационного неравенства

$$\langle J(u^{(n+1)} - u^{(n)}), \eta - u^{(n+1)}\rangle + \tau\left(\sum_{i=1}^m F_{i\,\varepsilon_n}(\eta) - \sum_{i=1}^m F_{i\,\varepsilon_n}\Big(u^{(n+1)}\Big)\right) \ge$$

$$\geq \tau\langle f - Au^{(n)}, \eta - u^{(n+1)}\rangle \qquad \forall\, \eta \in M, \tag{20}$$

где $\tau > 0$ — итерационный параметр, $J : V \to V^*$ — оператор двойственности, порождаемый функцией Φ:

$$\langle J\eta, \eta\rangle = \|J\eta\|_{V^*}\|\eta\|_V = \Phi(\|\eta\|_V)\|\eta\|_V \qquad \forall\, \eta \in V.$$

При этом, если $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c(\varepsilon_n) = \alpha < +\infty, \quad 0 < \tau < \min\left\{1\,, \frac{1}{\mu_0}\right\}$,
$\mu_0 = \mu(R_0 + \Phi^{-1}(R_1 + \gamma^*)),\ R_0 = \sup\limits_{u \in S_0} \|u\|_V,\ R_1 = \sup\limits_{u \in S_0} \|Au - f\|_{V^*}$,

$$S_0 = \{u \in M : F(u) \leq F(u^{(0)}) + 2\alpha\}, \quad F(\eta) = F_0(\eta) + \sum_{i=1}^{m} F_i(\eta) - \langle f, \eta\rangle,$$

$$F_0(\eta) = \int\limits_0^1 \langle A(t\eta), \eta\rangle dt,$$

то итерационная последовательность $\{u^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$, построенная согласно (20), ограничена в V, и все ее слабо предельные точки являются решениями задачи (17).

Таким образом, каждый шаг итерационного процесса сводится к решению вариационного неравенства

$$\langle Jw, \eta - w\rangle + \tau\left(\sum_{i=1}^{m} F_{i\,\varepsilon_n}(\eta) - \sum_{i=1}^{m} F_{i\,\varepsilon_n}(w)\right) \geq \tau\langle F_n, \eta - w\rangle \quad \forall \eta \in M, \tag{21}$$

где $F_n = f - Au^{(n)} + 1/\tau\, Ju^{(n)}$.

В § 2 **главы 2** рассмотрен случай, когда V — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, отождествленное со своим сопряженным V^*. Предполагаем, что оператор $A : V \to V$ обратно сильно монотоннен:

$$\|Au - A\eta\|_V^2 \leq \sigma\ (Au - A\eta, u - \eta)_V\,,\ \sigma > 0 \quad \forall\, u, \eta \in V. \tag{22}$$

Функционалы $F_{i\,\varepsilon_n}$, удовлетворяют условиям (18), (19).

Для решения задачи (17) рассмотрим следующий итерационный метод. Пусть $u^{(0)} \in M$ — произвольный элемент. Определим для $n = 0, 1, 2, \ldots$ элемент $u^{(n+1)} \in M$ как решение вариационного неравенства:

$$\left(u^{(n+1)}\ ,\ \eta - u^{(n+1)}\right)_V + \tau\left(\sum_{i=1}^{m} F_{i\,\varepsilon_n}(\eta) - \sum_{i=1}^{m} F_{i\,\varepsilon_n}\left(u^{(n+1)}\right)\right) \geq$$

$$\geq \tau\Big(F_n, \eta - u^{(n+1)}\Big)_V \quad \forall\, \eta \in M, \tag{23}$$

где $0 < \tau < \tau_0 = 2/\sigma,\ F_n = f - Au^{(n)} + 1/\tau u^{(n)}$.

Если оператор A является псевдомонотонным, потенциальным, липшиц-непрерывным, коэрцитивным и удовлетворяет условию (22), то итерационная последовательность $\left\{u^{(n)}\right\}_{n=0}^{\infty}$, построенная согласно (23), сходится слабо в V к u^* при $n \to +\infty$, где u^* − решению задачи (17) .

Пусть V и H гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_V$, $(\cdot,\cdot)_H$, $M = V$. Далее, предполагаем, что $F_i = G_i \circ B_i$, где $G_i : H \to R^1$ − собственные, выпуклые, слабо полунепрерывные снизу функционал, B_i : $V \to H$ − линейные непрерывные операторы, такие, что

$$(B_i u, B_i \eta)_H = (u, \eta)_V \quad \forall\, u, \eta \in V,$$

Введем функционалы $G_{i\,\varepsilon}$, который удовлетворяет условиям (18), (19). Тогда функционал $F_{i\,\varepsilon}$ запишем в виде $F_{i\,\varepsilon} = G_{i\,\varepsilon} \circ B_i$.

Для решения вариационного неравенства (23) рассматривается следующий итерационный процесс. Для заданных $r > 0$, начальных приближений $\lambda_i^{(0)} \in H, p_i^{(0)} \in H$, таких, что $\lambda_i^{(0)} \in \partial G_{i\,\varepsilon}(p_i^{(0)})$, определим последовательности $\left\{w^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$, $\left\{p_i^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$, $\left\{\lambda_i^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ следующим образом.

Найдем элемент $w^{(k+1)}$ как решение задачи

$$(w^{(k+1)} - \tau F_n, \eta)_V + \tau \sum_{i=1}^{m} \Big(\lambda_i^{(k)} - r^{(k)} p_i + r B_i w^{(k+1)}, B_i \eta\Big)_H = 0 \ \ \forall\, \eta \in V. \tag{24}$$

По известному $w^{(k+1)}$ находим элементы $p_i^{(k+1)}$, решая m задач минимизации

$$G_{i\varepsilon_n}\left(p_i^{(k+1)}\right) - \left(\lambda_i^{(k)}, p_i^{(k+1)}\right)_H + \frac{r}{2}\left\|B_i w^{(k+1)} - p_i^{(k+1)}\right\|_H^2 \leq$$

$$\leq G_{i\varepsilon_n}(q) - \left(\lambda_i^{(k)}, q_i\right)_H + \frac{r}{2}\left\|B_i w^{(k+1)} - q_i\right\|_H^2 \quad \forall\, q_i \in H. \tag{25}$$

Находим элемент $\lambda_i^{(k+1)}$ для $i = 1, 2, \ldots, m$ по явной формуле

$$\lambda_i^{(k+1)} = \lambda_i^{(k)} + r\,\left(B_i w^{(k+1)} - p_i^{(k+1)}\right). \tag{26}$$

При этом $\{w^{(k)}\}$ сходится слабо в V к некоторому решению w задачи (23), $\{p_i^{(k)}\}$ сходится сильно в H к $B_i w$ при $k \to +\infty$.

В § 3 **главы 2** установлены дополнительные свойства операторов, входящих в вариационное неравенство (14), описывающее задачу фильтрации (1) - (4). Эти свойства позволяют применить теоремы о сходимости метода итеративной регуляризации при решении задач фильтрации.

Лемма 1 . *Пусть выполнены условия (6) − (10). Тогда операторы* A_i *потенциальны, их потенциалами являются функционалы* F_{0i}*,*

$$F_{0i}(u) = \int\limits_{\Omega} \int\limits_{0}^{D_i(u)} g_{i0}(\xi^2)\xi dx d\xi,$$

и справедливы формулы

$$F_{0i}(u+\eta) - F_{0i}(u) = \int\limits_0^1 \langle A_i(u+t\eta), \eta\rangle dx. \qquad (27)$$

Лемма 2 . *Пусть* $p \geq 2$*, выполнены условия (6) − (9),*

$$\frac{g_{i0}(\gamma_1^2)\gamma_1 - g_{i0}(\gamma_2^2)\gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \leq c_{6i}\,(1+\gamma_1+\gamma_2)^{p-2}, \quad \forall\, \gamma_1, \gamma_2 > 0. \qquad (28)$$

Тогда оператор A *является ограниченно липшиц-непрерывным с функциями* Φ *и* μ *определяемыми по формулам* $\Phi(\xi) = \xi$*,* $\mu(\xi) = c_8\,(1+2\xi)^{p-2}$*,* $c_8 > 0$.

Следствие 1 . *Пусть* $p = 2$*, выполнены условия (6) − (10), (28). Тогда оператор* A *является обратно сильно монотонным с постоянной* c_8.

Лемма 3 . *Пусть* $1 < p < 2$*, выполнены условия (6) − (9),*

$$\frac{g_{i0}(\gamma_1^2)\gamma_1 - g_{i0}(\gamma_2^2)\gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \leq c_{6i}\,(\gamma_1+\gamma_2)^{p-2} \quad \forall\, \gamma_1, \gamma_2 > 0. \qquad (29)$$

Тогда оператор A *является ограниченно липшиц-непрерывным с функциями* $\Phi(\xi) = \xi^{p-1}$*,* $\mu(\xi) = c_9$*,* $c_9 > 0$.

В § 4 **главы 2** метод итеративной регуляризации применяется для решения задач анизотропной фильтрации.

Предполагаем, что функции $\xi \to g_{i\,0}(\xi^2)\xi, i = 1, 2, \ldots, m$ кроме условий, определенных в § 1 главы 1, удовлетворяет также условиям подчинения (28), (29) В случае $p = 2$, когда V является гильбертовым пространством, оператор A является обратно сильно монотонным, то есть удовлетворяет (22).

Для решения рассматриваемых в главе 1 задач анизотропной фильтрации выполнены необходимые условия для применения метода итеративной регуляризации.

Определим регуляризованную функцию по формуле

$$g_{i\,1\varepsilon}(\xi^2)\xi = \begin{cases} 0, & \xi \leq \beta_i - \varepsilon, \\ \vartheta_i(\xi - \beta_i + \varepsilon)/\varepsilon, & \beta_i - \varepsilon \leq \xi \leq \beta_i, \\ \vartheta_i/m, & \xi \geq \beta_i. \end{cases} \tag{30}$$

которая порождает функционалы $F_{1\varepsilon}$ и $G_{1\varepsilon}$. Имеет место

Лемма 4 . *Пусть функция $g_{i\,1\varepsilon}(\xi^2)\xi$ определена согласно (30). Тогда функционал $F_{i\,\varepsilon}$ удовлетворяет условию (18), где $c(\varepsilon) = 2\,\varepsilon\,\mathrm{mes}\,\Omega$.*

С учетом формулы (30) итерационный процесс (24) - (26) запишется в следующем виде.

Пусть $p_i^{(0)}$ - произвольный вектор из H,

$$\lambda_i^{(0)} = g_{i\,1\varepsilon_n}\left(\left|p_i^{(0)}\right|^2\right)p_i^{(0)}/\left|p_i^{(0)}\right|, i = 1, 2, \dots, m.$$

Для известных $p_i^{(k)}$, $\lambda_i^{(k)}$ найдем $w^{(k+1)}$ как решение задачи

$$\begin{cases} -(1 + m\tau r)Rw^{(k+1)} = \tau\left[F_n + \sum\limits_{i=1}^{m} B_i^*\,(\lambda_i^{(k)} - rp_i^{(k)})\right], & x \in \Omega, \\ w^{(k+1)}(x) = 0, & x \in \Gamma_1, \\ (w^{(k+1)}(x), \mathbf{n}) = 0, & x \in \Gamma_2, \end{cases} \tag{31}$$

где $R = -\mathrm{div}\left(\sum\limits_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{m}} \Upsilon_{\mathrm{i}}\nabla\right)$.

По известному $w^{(k+1)}$ находим $p_i^{(k+1)}, i = 1, 2, \dots, m$ по формуле

$$p_i^{(k+1)} = \frac{\alpha}{g_{1\,i\varepsilon}(t^2) + r},$$

где $\alpha = \lambda_i^{(k)} + rB_iw^{(k+1)},\ z = |\alpha|$,

$$t = \begin{cases} z/r, & z \leq r(\beta_i - \varepsilon_n), \\ (\vartheta_i/m(\beta_i - \varepsilon_n) + \varepsilon_n z)/(\vartheta_i/m + \varepsilon_n r), & r(\beta_i - \varepsilon_n) \leq z \leq r\beta_i + \vartheta_i/m, \\ (z - \vartheta_i/m)/r, & z \geq r\beta_i + \vartheta_i/m. \end{cases}$$

Полагаем затем для $i = 1, 2, \ldots, m$

$$\lambda_i^{(k+1)} = \lambda_i^{(k)} + r\,\left(B_i w^{(k+1)} - p_i^{(k+1)}\right).$$

Действительно, задача (31) может быть записана в виде (24), вследствие того, что $B_i^* = -\mathrm{div}\,\Upsilon_i^{1/2}$.

В § 1 **главы 3** построен итерационный метод расщепления для решения вариационных неравенств второго рода с обратно сильно монотонным оператором и выпуклыми, недифференцируемыми функционалами в гильбертовых пространствах, к которым сводятся задачи анизотропной фильтрации, рассматриваемые в главе 1. Проведено исследование сходимости предложенного итерационного метода.

Пусть V, H – гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_V$, $(\cdot,\cdot)_H$ соответственно, отождествленные со своими сопряженными, $A:\ V \to V$ – обратно сильно монотонный оператор с постоянной $\sigma > 0$:

$$(Au - A\eta, u-\eta)_V \geq \sigma\,\|Au - A\eta\|_V^2\,, \quad \sigma > 0 \quad \forall\, u, \eta \in V, \tag{32}$$

Для решения вариационного неравенства (15) рассмотрим следующий итерационный процесс. Пусть $u^{(0)} \in V$, $y_i^{(0)} \in H$, $\lambda_i^{(0)} \in H$, $i = 0, 1, \ldots, m$ – произвольные элементы. Для $k = 0, 1, 2, \ldots$, зная $y_i^{(k)}$, $\mu_i^{(k)}$, определим $u^{(k+1)}$:

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} - \tau\left(Au^{(k)} - f + r\,\sum_{i=1}^m B_i^* B_i\, u^{(k)} + \sum_{i=1}^m B_i^*\Big(\lambda_i^{(k)} - r\, y_i^{(k)}\Big)\right), \tag{33}$$

затем находим $y_i^{(k+1)}$, решая задачи минимизации

$$r(y_i^{(k+1)}, z_i - y_i^{(k+1)})_H + G_i(z_i) - G_i(y_i^{(k+1)}) \geq$$

$$\geq (rB_i u^{(k+1)} + \lambda_i^{(k)}, z_i - y_i^{(k+1)})_H \quad \forall\, z_i \in H, \quad i = 1, 2 \ldots, m, \tag{34}$$

и находим $\lambda_i^{(k+1)}$ по формуле

$$\lambda_i^{(k+1)} = \lambda_i^{(k)} + r\left(B_i u^{(k+1)} - y_i^{(k+1)}\right), \quad i = 1, 2 \ldots, m, \tag{35}$$

где $\tau > 0$ и $r > 0$ – итерационные параметры, $B_i^* : H \to V$— сопряженные к B_i операторы:

$$(B_i^* y_i, \eta)_V = (y_i, B_i\eta)_H \quad \forall\, \eta \in V,\ y_i \in H.$$

Кроме того, будем предполагать, что выполняется равенство

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(B_i u, B_i \eta)_H = (u,\eta)_V \qquad \forall\, u,\, \eta \in V\,.$$

Для исследования сходимости описанного итерационного процесса выпишем явный вид оператора перехода этого процесса.

Обозначим через H^m прямое произведение m пространств H и введем в рассмотрение оператор $T: V\times H^m\times H^m \to V\times H^m\times H^m$, ставящий в соответствие вектору $q=(q_0,q_1,q_2,\ldots,q_{2m})=(u,y_1,\ldots,y_m,\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$, элементы $Tq=\big\{\,T_0q,T_1q,\ldots,T_{2m}q\,\big\}$ следующим образом:

$$T_0q = q_0-\tau\Big[\,Aq_0-f+r\sum_{i=1}^{m}B_i^*B_i\,q_0+\sum_{i=1}^{m}B_i^*\big(q_{m+i}-r\,q_i\,\big)\,\Big], \tag{36}$$

$$T_iq = \operatorname{Prox}_{G_i/r}\Big(\,B_i\,T_0q+\frac{1}{r}\,q_i\,\Big),\quad i=1,2,\ldots,m\,, \tag{37}$$

$$T_{m+i}q = q_{m+i}+r\,\big[\,B_i\,T_0q-T_iq\,\big]\,,\quad i=1,2,\ldots,m\,. \tag{38}$$

Здесь $\operatorname{Prox}_G: Z\to Z$ – проксимальное отображение, сопоставляющие каждому элементу p из гильбертова пространства Z элемент $v=\operatorname{Prox}_G(p)$, являющийся решением задачи минимизации

$$\frac{1}{2}\,\|\,v-p\,\|_Z^2+G(v)=\min_{z\in Z}\,\Big\{\,\frac{1}{2}\,\|\,z-p\,\|_Z^2+G(z)\,\Big\},$$

которая эквивалентна в случае, когда G – выпуклый, собственный, полунепрерывный снизу функционал, вариационному неравенству

$$(v-p,z-v)_Z+G(z)-G(v)\ge 0 \qquad \forall\, z\in Z\,. \tag{39}$$

Нетрудно проверить, что проксимальное отображение является жестко нерастягивающим, то есть

$$\Big\|\operatorname{Prox}_G(p)-\operatorname{Prox}_G(z)\,\Big\|_Z^2 \le \Big(\,\operatorname{Prox}_G(p)-\operatorname{Prox}_G(z),\,p-z\,\Big)_Z \quad \forall\, p,z\in Z.$$

Используя определение проксимального отображения в виде вариационного неравенства (39), легко установить, что итерационный процесс (33) – (35) может быть записан в следующем виде:

$$\begin{cases} q_0 - \text{ произвольный элемент,}\\ q^{(k+1)}=Tq^{(k)},\\ q^{(k)}=\Big(u^{(k)},y_1^{(k)},y_2^{(k)},..,y_m^{(k)},\lambda_1^{(k)},\lambda_2^{(k)},..,\lambda_m^{(k)}\Big)\,,\ k=0,1,2,\ldots, \end{cases} \tag{40}$$

то есть T — оператор перехода этого итерационного процесса.

Справедливы

Теорема 2 . *Точка* $q = (u, B_1 u, B_2 u, \ldots, B_m u, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ *является неподвижной точкой оператора* T *в том и только в том случае, когда выполнены условия*

$$y_i = B_i u, \quad \lambda_i \in \partial G_i(B_i u), \quad -\sum_{i=1}^{m} B_i^* \lambda_i = Au - f, \quad i = 1, 2 \ldots, m.$$

При этом первая компонента u *любой неподвижной точки оператора* T *является решением задачи (15).*

Теорема 3 . *Пусть существует по крайней мере одно решение задачи (15). Тогда множество неподвижных точек оператора* T *не пусто.*

В § 2 **главы 3** исследована сходимость итерационного метода расщепления.

Из теоремы 2 следует, что исследование сходимости итерационного процесса (33) – (35) сводится к исследованию сходимости метода последовательных приближений отыскания неподвижной точки оператора T.

Введем в рассмотрение гильбертово пространство $Q = V \times H^m \times H^m$ со скалярным произведением

$$(\cdot, \cdot)_Q = \frac{(1 - m\tau\, r)}{\tau}\,(\cdot, \cdot)_V + r\sum_{i=1}^{m}(\cdot, \cdot)_H + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}(\cdot, \cdot)_H\,.$$

Лемма 5 . *Пусть* $A_i : V \to V$ *— обратно сильно монотонные операторы с постоянными* σ_i*,* $i = 1, 2, \ldots, m$*. Тогда оператор* $A : V \to V$*,* $A = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{m} A_i$*, также является обратно сильно монотонным.*

Справедлива

Теорема 4 . *Пусть* $A : V \to V$ *— обратно сильно монотонный оператор с константой* $\sigma > 0$*, и выполнено условие:*

$$0 < \tau < \frac{2\,\sigma}{2\,m\,\sigma\,r + 1}. \tag{41}$$

Тогда оператор T, определяемый соотношениями (36) − (38), является нерастягивающим.

Более того, для любых $p, q \in Q$ справедливо неравенство

$$\| Tq - Tp \|_Q^2 + \delta\,(Aq_0 - Ap_0, q_0 - p_0)_V +$$

$$+\frac{1}{\tau\,(1-m\tau r)}\,\|(1-\tau r)\big(q_0 - T_0 q - (p_0 - T_0 p)\big) - \tau(Aq_0 - Ap_0)\|_V^2 +$$

$$+\, r\sum_{i=1}^{m}\Big\|\, q_i - B_i T_0 q - \big(p_i - B_i T_0 p\big)\,\Big\|_H^2 \le \|\, q - p \,\|_Q^2,$$

где $\delta = 2 - \tau/\big(\sigma(1 - m\,\tau r)\big)$.

Теорема 5 *Пусть $A : V \to V$ − обратно сильно монотонный оператор с константой $\sigma_0 > 0$, выполнены условия (32), (41), задача (15) имеет по крайней мере одно решение, итерационная последовательность $\big\{q^{(k)}\big\}_{k=0}^{+\infty}$ построена по формуле $q^{(k+1)} = Tq^{(k)}$, $q^{(0)} \in Q$ − произвольно заданный элемент. Тогда эта последовательность сходится слабо в Q при $k \to +\infty$, ее предел q^* является неподвижной точкой оператора T, и справедливы равенства $\lim_{k\to+\infty}\Big\| y_i^{(k)} - B_i u^{(k)}\Big\|_H = 0$, $i = 1, 2, \dots m$, $\lim_{k\to+\infty}\big\| q^{(k+1)} - q^{(k)}\big\|_Q = 0$.*

Отметим, что если выполнены условия теоремы 2, то из теорем 3, 5 вытекает, что последовательности $\big\{u^{(k)}\big\}_{k=0}^{+\infty}$, $\big\{y_i^{(k)}\big\}_{k=0}^{+\infty}$, построенные согласно (33) − (35), сходятся слабо к u в V и к $B_i u$ в H, $i = 1, 2, \dots m$, соответственно, при $k \to \infty$, где u − решение вариационного неравенства (15).

В § 3 **главы 3** метод расщепления (33) - (35) применен для решения рассматриваемых задач анизотропной фильтрации.

Рассмотрим особенности применения итерационного метода (33) − (35) для решения рассматриваемых задач анизотропной фильтрации.

Для определения $u^{(k+1)}$ необходимо сначала решить краевую задачу

$$\begin{cases} Rs = f - Au^{(k)} + \sum\limits_{i=1}^{m} B_i^*(\lambda_i^{(k)} - rp_i^{(k)}) + mr\,Ru^{(k)}, & x \in \Omega, \\ s(x) = 0, \quad x \in \Gamma_2, \quad (s(x), \mathbf{n}) = 0, & x \in \Gamma_1, \end{cases} \tag{42}$$

где $R = -\mathrm{div}\left(\sum\limits_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \Upsilon_{\mathrm{i}}\nabla\right)$, а затем положить $u^{(k+1)} = u^{(k)} + \tau\, s$. Отметим, что в нашем случае $B_i^* = -\mathrm{div}\Upsilon_{\mathrm{i}}^{1/2}$.

При численной реализации итерационного метода (33) - (35) основную трудность представляет решение задач минимизации (34). Запишем их в виде:

$$(r\,B_i u^{(k+1)} + \lambda_i^{(k)}, z_i - y_i^{(k+1)})_H \le G_{i\,r}(z_i) - G_{i\,r}(y_i^{(k+1)}) \quad \forall\, z_i \in H, \qquad (43)$$

где $G_{i\,r}(z_i) = G_i(z_i) + \dfrac{r}{2}\,\|z_i\|_H^2$.

Используя определение субдифференциала $\partial\, G_{i\,r}$, запишем (43) в виде включения $r\,B_i u^{(k+1)} + \lambda_i^{(k)} \in \partial\, G_{i\,r}(y_i^{(k+1)})$. Которое эквивалентно следующему $y_i^{(k+1)} \in \partial\, G^*_{i\,r}(r\,B_i u^{(k+1)} + \lambda_i^{(k)})$.

Функционал $G^*_{i\,r}$ является выпуклым и дифференцируемым по Гато, субдифференциал этого функционала состоит из единственного элемента, совпадающего с его градиентом, определяемым формой $((G^*_{i\,r})'z, y)_H = g^*_{i\,r}(|z|^2)z$, где

$$g^*_{i\,r}(\xi^2)\xi = \begin{cases} \xi/r, & \xi \le r\,\beta_i, \\ \beta_i, & r\,\beta_i < \xi \le r\,\beta_i + \vartheta_i/m, \\ (\xi - \vartheta_i/m)/r, & \xi > r\,\beta_i + \vartheta_i/m. \end{cases}$$

Поэтому задачи (34) состоят в вычислениях $y_i^{(k+1)}$ по формулам $y_i^{(k+1)} = g^*_{i\,r}(|q|^2)q, \quad q = r\,B_i u^{(k+1)} + \lambda_i^{(k)}, i = 1, \ldots, m.$

$\lambda_i^{(k+1)}$ определяется по формуле: $\lambda_i^{(k+1)} = \lambda_i^{(k)} + r\,\left(B_i u^{(k+1)} - y_i^{(k+1)}\right)$.

Таким образом, каждый шаг рассматриваемого итерационного метода сводится фактически к решению краевой задачи (42) с линейным сильно эллиптическим оператором.

В **четвертой** главе приводятся результаты численных экспериментов для модельных задач фильтрации, полученные методом итеративной регуляризации и методом расщепления, проводится их анализ.

В § 1 проведено построение внутренних конечноэлементных аппроксимаций вариационных неравенств, которые описывают рассматриваемые задачи.

В § 2 приведены результаты численных расчетов для задач анизотропной фильтрации. Строятся триангуляции расчетных областей Ω, которые получаются путем равномерного разбиения ее сторон на n_1 и n_2 частей, построения треугольников с диагоналями, параллельными биссектрисе первого и третьего координатного углов, и применения метода конечных элементов с использованием кусочно-линейных на треугольниках функций.

Предложенные в работе методы были реализованы численно.

Рассматривалось течение в двумерной области Ω.

Матрицы Υ_i выбирались равными

$$\Upsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Upsilon_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Функции $\xi \to g_{i0}(\,\xi^2\,)\,\xi$ задавались соотношениями

$$g_{i0}(\,\xi^2\,)\xi = \begin{cases} 0 & \xi \le \beta_i\,, \\ \xi - \beta_i & \xi \ge \beta_i\,, \end{cases} \quad \beta_1 = 1,\ \beta_2 = 0.7.$$

Кроме того, полагалось $\vartheta_1 = 1$, $\vartheta_2 = 0.7$. Число разбиений составило 64×64. На приводимых рисунках темным цветом закрашены конечные элементы, на которых скорость фильтрации равна нулю.

На рисунках (1), (3) представлены результаты, полученные методом итеративной регуляризации. На рисунках (2), (4) представлены результаты, полученные методом расщепления.

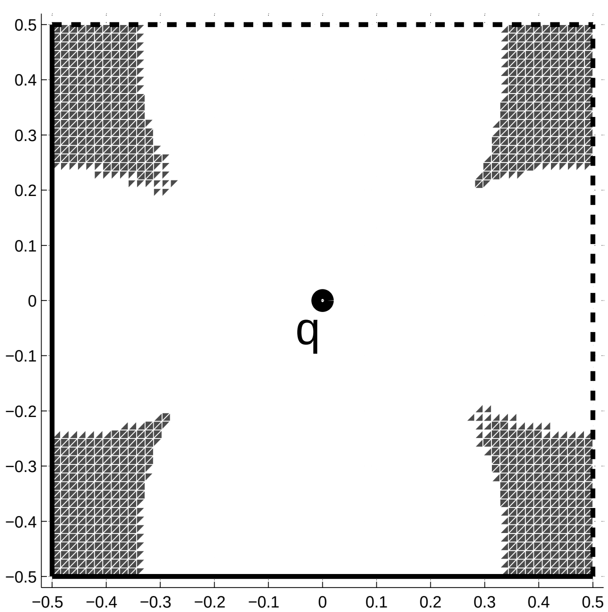

Рис. 1.

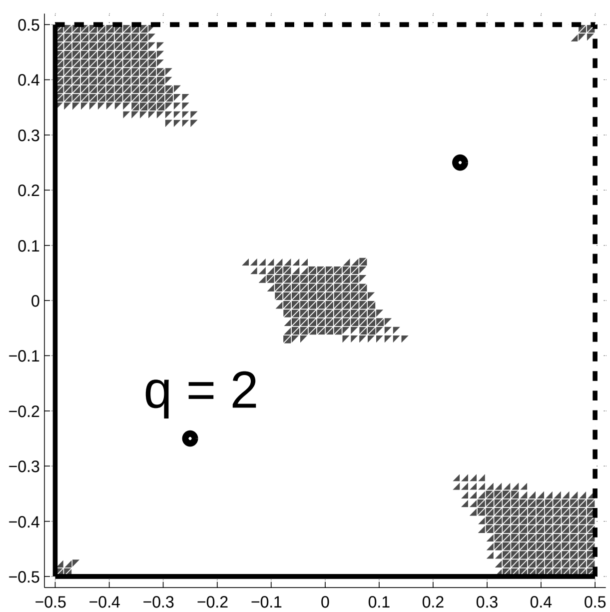

Рис. 2.

На рис. (1) приведены результаты расчетов в случае одной скважины с дебитом $q = 1.5$, находящейся в центре. Выбирались следующие значения параметров: $\tau = 0.6$, $r = 0.5$.

На рис. (2) приведены результаты расчетов в случае двух скважин с дебитами $q = 2$, находящихся на диагонали. Выбирались следующие значения параметров: $\tau = 0.7$, $r = 0.45$.

На рис. (3) приведены результаты расчетов в случае одной скважины с дебитом $q = 2$. Выбирались следующие значения параметров: $\tau = 0.4$, $r = 0.7$.

На рис. (4) приведены результаты расчетов в случае двух скважин с дебитами $q = 1.5$, находящихся по диагонали. Выбирались следующие значения параметров: $\tau = 0.45$, $r = 0.6$.

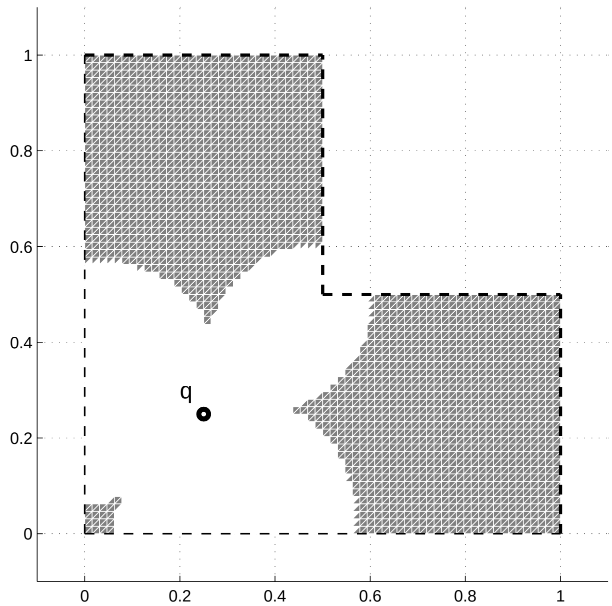

Рис. 3.

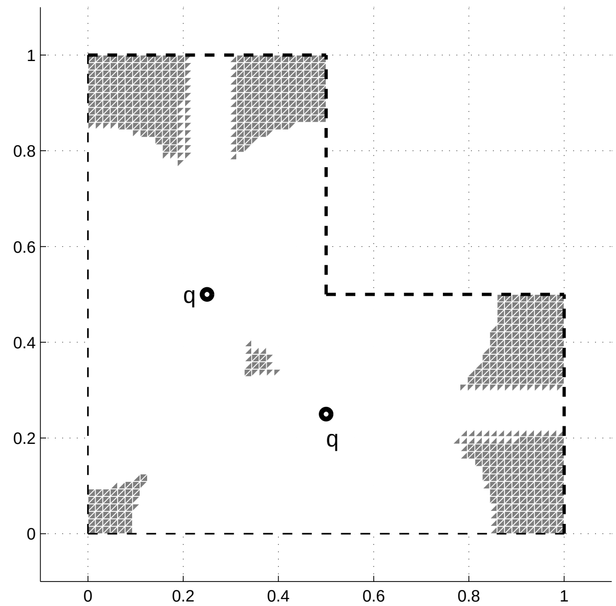

Рис. 4.

При использовании метода расщепления наименьшее количество итераций равнялось 57 при $\tau = 0.6$, $r = 0.5$. В отличие от изотропного случая, для рассматриваемой анизотропной задачи наблюдается асимметричный характер течения.

Приведенные численные результаты показали эффективность предложенных методов решения рассматриваемых задач фильтрации.

Основные научные положения и результаты работы

1. Теорема разрешимости вариационных неравенств второго рода, возникающих при математическом описании процессов установившейся анизотропной фильтрации.

2. Достаточные условия сходимости методов расщепления и итеративной регуляризации для решения возникающих при математическом описании процессов установившейся анизотропной фильтрации вариационных неравенств с операторами монотонного типа и выпуклыми недифференцируемыми функционалами.

3. Результаты численных экспериментов по решению стационарных анизотропных задач фильтрации с многозначным законом, подтвердившие эффективность предложенных итерационных методов.

Список публикаций по теме диссертации

1. Исмагилов И.Н. Численное исследование нелинейных стационар-ных задач теории фильтрации с предельным градиентом // Тезисы докладов итоговой научно-образовательной конференции студентов КГУ 2005 г. - Казань: Казанский государственный университет. - 2005. - С. 64.

2. Бадриев И.Б. Исследование некоторых нелинейных краевых задач с вырождением по градиенту / И.Б. Бадриев, И.Н. Исмагилов // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы 6-го Всероссийского семинара. - Казань: Казанский государственный университет, 2005. - С. 50-54.

3. Бадриев И.Б. Итерационные методы решения стационарных задач анизотропной фильтрации / И.Б. Бадриев, И.Н. Исмагилов // Труды Средневолжского математического общества. - 2006. - Т. 8, N 1. - С. 150-159.

4. Бадриев И.Б. Итерационные методы решения стационарных задач анизотропной фильтрации / И.Б. Бадриев, И.Н. Исмагилов // Исследования по прикладной математике и информатике. - Казань: Изд-во Казанского математического общества, 2006. - Вып. 26. - С.18-34.

5. Бадриев И.Б. Математическое моделирование стационарных анизотропных задач теории фильтрации с многозначным законом / И.Б. Бадриев, И.Н. Исмагилов // Вестник Удмуртского университета. Математика. - 2007. - N 1. - С. 3-8.

6. Бадриев И.Б. Численное исследование нелинейной анизотропной стационарной задачи теории фильтрации / И.Б. Бадриев, И.Н. Исмагилов // Материалы XV Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам, Алушта, Крым, 25-31 мая 2007 г. - М: Вузовская книга, 2007. - С. 71-72.

7. Бадриев И.Б. О решении нелинейных стационарных анизотропных задач фильтрации / И.Б. Бадриев, И.Н. Исмагилов // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы 7-го Всероссийского семинара. - Казань: Изд-во Казанского государственного университета, 2007. - С. 49-54.

8. Исмагилов И.Н. Методы решения нелинейных стационарных анизотропных задач фильтрации / И.Н. Исмагилов, И.Б. Бадриев // Ученые записки Казанского государственного университета. Физико-математические науки. - 2007. - Т. 149, Кн. 4. - С. 90-100.